

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1 Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και εξετάστε την ευστάθειά τους για τις παρακάτω εξισώσεις:

(i) $y' = 3y(1 - y)$

(ii) $y' = y^2 - 6y - 16$

(iii) $y' = (y - 2)(1 - 2 \sin y)$

Άσκηση 2 Υπολογίστε τις γραμμικοποιήσεις των εξισώσεων της άσκησης 1 για κάθε σημείο ισορροπίας της αντίστοιχης εξίσωσης.

Άσκηση 3 Να προσδιοριστούν οι τιμές διακλάδωσης και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης και της ευστάθειας των αντίστοιχων σημείων ισορροπίας για τις εξισώσεις:

(i) $y' = \mu y(1 - y)^2 - y^3$

(ii) $y' = \mu y^2 + y^4$

για $\mu \in \mathbb{R}$

Άσκηση 4 Να υπολογίσετε τις ροές και ολοκληρωτικές καμπύλες για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$:

(i) $\vec{v} = (-y_2, y_1)$, (ii) $\vec{v} = (y_1, 2y_2)$, (iii) $\vec{v} = (y_2, y_1)$,

όπου υπενθυμίζεται ότι η ροή $\vec{\varphi}_t(\vec{\xi}) = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ λύνει το ΠΑΤ:

$$\vec{y}' = \vec{v}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{\xi}, \quad \vec{y} = (y_1, y_2), \quad \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

Άσκηση 5 Ναδειχθεί ότι αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη διακλάδωσης της εξίσωσης $y' = c + dy - y^3$ είναι $4d^3 = 27c^2$.

Άσκηση 6 Ναδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{cases} y_1' = (a - by_2)y_1 \\ y_2' = (dy_1 - c)y_2 \end{cases}$$

διατηρεί το πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή, αν $y_1(0), y_2(0) \geq 0$, τότε $y_1(t), y_2(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Υποδείξεις

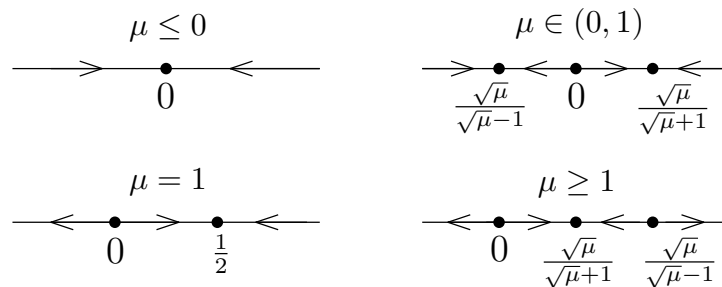
1 Σημεία ισορροπίας: (i) $\bar{y} = 0, 1$ (ii) $\bar{y} = -2, 8$ (iii) $\bar{y} = 2, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Τύπος: (i) 0 ασταθές, 1 ασυμπωτικά ευσταθές (ii) -2 ασ. ευσταθές, 8 ασταθές (iii) 2 ασ. ευσταθές, $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ασταθές για $k \leq 0$ και ασ. ευσταθές για $k \geq 1$, $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ασταθές για $k \geq 0$ και ασ. ευσταθές για $k \leq -1$.

2 Η γραμμικοποίηση σε κάθε περίπτωση γύρω από σημείο ισορροπίας είναι η εξίσωση $y' = f'(\bar{y})y$.

(i) $f'(0) = 3, f'(1) = -3$ (ii) $f'(-2) = -10, f(8) = 10$ (iii) $f'(2) = 1 - 2\sin 2, f'(2k\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}(2k\pi + \frac{\pi}{6} - 2), f'(2k\pi + \frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3}(2k\pi + \frac{5\pi}{6} - 2)$.

3 (i) Σημεία ισορροπίας: $\mu\bar{y}(1 - \bar{y})^2 - \bar{y}^3 = \bar{y}[\mu(1 - \bar{y})^2 - \bar{y}^2]$. Για $\mu \leq 0, \bar{y} = 0$. Για $\mu \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \bar{y} = 0, \frac{\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}, \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}-1}$. Για $\mu = 1, \bar{y} = 0, \frac{1}{2}$. Άρα έχουμε 2 τιμές διακλάδωσης $\bar{\mu} = 0, 1$. Τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης είναι ως εξής:



Για $\mu < 0$, το 0 είναι ασυμπωτικά ευσταθές. Για $\mu \in (0, 1)$, το 0 είναι ασταθές, ενώ τα $\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}-1}, \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}+1}$ είναι ασ. ευσταθή. Για $\mu = \frac{1}{2}$, το 0 είναι ασταθές και το $\frac{1}{2}$ ασ. ευσταθές. Τέλος, για $\mu > 1$, τα $0, \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}-1}$ είναι ασταθή και το $\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}+1}$ είναι ασ. ευσταθές.

(ii) Σημεία ισορροπίας: $\mu\bar{y}^2 + \bar{y}^4 = \bar{y}^2(\mu + \bar{y}^2) = 0$. Για $\mu \geq 0, \bar{y} = 0$. Για $\mu < 0, \bar{y} = 0, -\sqrt{-\mu}, \sqrt{-\mu}$. Άρα έχουμε διακλάδωση για την τιμή $\bar{\mu} = 0$. Τα διαγράμματα φάσης στις 2 περιπτώσεις είναι



Για $\mu < 0$, το $-\sqrt{-\mu}$ είναι ασυμπωτικά ευσταθές και τα $0, \sqrt{-\mu}$ ασταθή σημεία ισορροπίας. Για $\mu \geq 0$, το 0 είναι ασταθές.

4 (i) $y_1'' = -y_1$, άρα $y_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Οι αρχικές συνθήκες $y_1(0) = \xi_1, y_1'(0) = -y_2(0) = -\xi_2$ δίνουν $c_1 = \xi_1, c_2 = -\xi_2$. Άρα

$$\begin{cases} y_1 = \xi_1 \cos t - \xi_2 \sin t \\ y_2 = -y_1' = \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t \end{cases} \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

Η ροή δίνεται από τον τύπο $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi}) = (\xi_1 \cos t - \xi_2 \sin t, \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t)$ και οι ολοκληρωτικές καμπύλες $\vec{\varphi}(\cdot, \vec{\xi})$ στο επίπεδο $y_1 y_2$ είναι ελλείψεις για $\vec{\xi} \neq 0$ και το σταθερό σημείο μηδέν για $\vec{\xi} = 0$.

(ii) Έχουμε

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \xi_1 e^t \\ y_2' = \xi_2 e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \vec{\varphi}(t, \vec{\xi}) = (\xi_1 e^t, \xi_2 e^{2t})$$

Για $\xi_1 = 0$ ή $\xi_2 = 0$ οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι οι θετικοί/αρνητικοί ημιάξονες αντίστοιχα, ανάλογα με το πρόσημο του μη μηδενικού ξ_i . Αν $\vec{\xi} = 0$, τότε έχουμε το σταθερό σημείο της ροής. Για $\xi_1, \xi_2 \neq 0$, τότε έχουμε $y_2 = (\xi_2/\xi_1^2)y_1^2$ και y_2 δεν αλλάζει πρόσημο, άρα η ολοκληρωτική καμπύλη είναι μισή παραβολή που περνάει από το (ξ_1, ξ_2) .

(iii) $y_1'' = y_1$, $y_1(0) = \xi_1, y_1'(0) = y_2(0) = \xi_2$. Άρα $y_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}e^t + \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}e^{-t}$ και $y_2 = y_1' = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}e^t - \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}e^{-t}$. Η ροή και οι ολοκληρωτικές καμπύλες δίνονται από τους τύπους:

$$\vec{\phi}(t, \vec{\xi}) = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}e^t + \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}e^{-t}, \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}e^t - \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}e^{-t} \right), \quad y_1^2 - y_2^2 = \xi_1^2 - \xi_2^2.$$

Επομένως οι καμπύλες για $|\xi_1| \neq |\xi_2|$ είναι κλαδιά υπερβολών που διέρχονται από το (ξ_1, ξ_2) . Για $|\xi_1| = |\xi_2| \neq 0$ έχουμε ημιευθείες 45 μοιρών και για $\vec{\xi} = 0$ το σταθερό σημείο 0.

5 Έστω $f_{c,d}(y) = c + dy - y^3$. Για να υπάρχει δικλάδωση, πρέπει τα c, d να είναι τέτοια ώστε για λίγο διαφορετικές τιμές να αλλάζει ο αριθμός των σημείων ισορροπίας (ρίζες της $f_{c,d}$). Υπολογίζουμε

$$f'_{c,d}(y) = d - 3y^2 = 0 \quad f''_{c,d}(y) = -6y.$$

Άρα το 0 είναι σημείο καμπής και για $d > 0$ η $f_{c,d}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\sqrt{\frac{d}{3}}$ και τοπικό μέγιστο στο $\sqrt{\frac{d}{3}}$. Για $d \leq 0$, η $f_{c,d}$ έχει μόνο ένα μηδενικό (σ.ι.), οπότε δεν υπάρχει διακλάδωση για γειτονικές τιμές των c, d . Στην περίπτωση $d > 0$, οι τιμές της $f_{c,d}$ τα τοπικά ακρότατα ισούνται

$$f_{c,d}\left(-\sqrt{\frac{d}{3}}\right) = c - \frac{2}{3}d\sqrt{\frac{d}{3}}, \quad f_{c,d}\left(\sqrt{\frac{d}{3}}\right) = c + \frac{2}{3}d\sqrt{\frac{d}{3}}.$$

Αν κανένα εκ των 2 ισούται με μηδέν, τότε η $f_{c,d}$ έχει 3 μηδενικά και δεν υπάρχει διακλάδωση για γειτονικές τιμές των c, d . Στην περίπτωση που ένα εκ των 2 μηδενίζεται, δηλ. $c = \pm \frac{2}{3}d\sqrt{\frac{d}{3}}$, η $f_{c,d}$ έχει 2 μηδενικά (ένα διπλό κι ένα απλό) και για γειτονικές τιμές του c η $f_{c,d}$ έχει είτε 1 ή 3 μηδενικά, άρα υπάρχει διακλάδωση. Αναγκαία λοιπόν συνθήκη για διακλάδωση είναι

$$c = \pm \frac{2}{3}d\sqrt{\frac{d}{3}} \Rightarrow c^2 = \frac{4}{9}d^2\frac{d}{3} \Rightarrow 27c^2 = 4d^3.$$

6 Για $y_1(0) = 0$ ή $y_2(0) = 0$, η αντίστοιχη τροχιά της λύσης είναι είτε ο θετικός ημιάξονας y_2 ή ο θετικός ημιάξονας y_1 ή το σταθερό σημείο 0. Στην περίπτωση που $y_1(0), y_2(0) > 0$, τότε $y_1(t), y_2(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$. Διαφορετικά η τροχιά της λύσης θα πρέπει να τέμνει είτε το θετικό ημιάξονα y_2 ή το θετικό ημιάξονα y_1 ή να περνάει από το 0. Όπως γνωρίζουμε δύο τροχιές που τέμνονται ταυτίζονται γεωμετρικά, άρα σε αυτή την περίπτωση $y_1(t) = 0$ ή $y_2(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$, άτοπο. Άρα δείξαμε ότι σε κάθε περίπτωση $y_1(t), y_2(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$, όταν τα αρχικά δεδομένα $y_1(0), y_2(0) \geq 0$.